

تحلیل سیگنال و سیستم گسسته در میدان فرکانس

۱-۵ سیگنال گسسته

۱-۱-۵ سری فوریه سیگنال پریودیک (DFS) Discrete Fourier Series

سیگنال گسسته پریودیک $x(n)$ که در آن $x(n) = x(n+IN)$ است را بصورت مجموع N هارمونیک اکسپونانسیلی می توان نوشت که به نام رابطه سنتر شناخته می شود.

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) W_N^{-kn} \quad W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$$

در این رابطه N پریود سیگنال است. در محاسبه $c(k)$ تساویهای ذیل اغلب مورد استفاده قرار می گیرند.

$$1) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad 2) \sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1 \end{cases} \quad 3) \sum_{n=M}^{N-1} a^n = \begin{cases} \frac{N-M}{1-a} & a = 1 \\ \frac{a^M - a^N}{1-a} & a \neq 1 \end{cases}$$

برای محاسبه $C(k)$ کافی است طرفین رابطه را در W_N^{ln} ضرب و روی $n=0, N-1$ جمع ببندیم.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{ln} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c(k) W_N^{ln} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c(k) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(k-l)n} = c(k)$$

در نتیجه رابطه تحلیل بدست می آید.

$$c(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad W_N^{kn} = e^{\frac{-j2\pi}{N} kn}$$

- شرط کافی وجود $c(k)$ این است که $\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| < \infty$ باشد. در اینصورت در صورت وجود ضرایب DFS ، سیگنال $x(n)$ از ضرایب

قابل بازسازی است.

خواص DFS

$c_h(k)$ و $c_x(k)$ با پریود N	$x(n)$ و $h(n)$ با پریود N	
$ac_x(k) + bc_h(k)$	$ax(n) + bh(n)$	خطی
$x(-k)/N$	$c(n)$	

$W_N^{km} c(k)$	$x(n-m)$	شیفت
$N c_x(k) c_h(k)$	$\sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(n-m)$	کانولوشن پریودیک
$\sum_{l=0}^{N-1} c_x(m) c_h(k-l)$	$x(n) h(n)$	ضرب
$c^*(-k)$	$x^*(n)$	
$c^*(k) = c(-k)$	$x(n)$	
	$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2 = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) ^2$	رابطه پارسوال

مثال : طیف سیگنال پریودیک $x(n) = \cos(n\omega_0)$ به ازای $\omega_0 = \sqrt{2}\pi$ و $\omega_0 = \pi/3$ را بدست آورید.

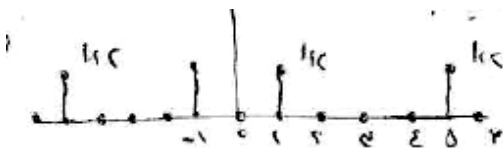
(۱) در $\omega_0 = \sqrt{2}\pi$ ، فرکانس دیجیتالی $f_\omega = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ کسری نیست لذا با این فرکانس $x(n)$ پریودیک نیست.

(۲) در فرکانس $\omega_0 = \pi/3$ فرکانس دیجیتالی $f_\omega = \frac{\pi}{3 \times 2\pi} = \frac{1}{6}$ کسری است و در نتیجه پریود $N=6$ است. ضرایب DFS آن بقرار ذیل

است.

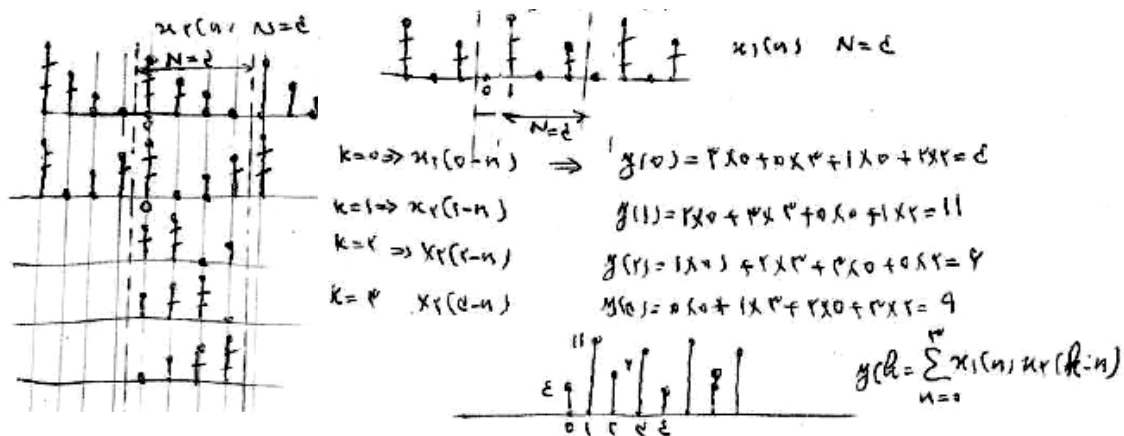
$$C(k) = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x(n) W_6^{kn} \Rightarrow C(10) = C(2) = C(4) = C(4) = 0$$

$$C(1) = C(5) = \frac{1}{2}$$



مثال ۲: روی دو سیگنال پریودیک $x_1(n)$ و $x_2(n)$ کانووشن پریودیک انجام

دهید



مثال ۳: ضرایب DFS برای سیگنال شکل بدست آورید.

$$c(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \Rightarrow c(0) = \frac{4}{6} = 2/3$$

$$c(1) = \frac{1}{6} (1 + 2W_6^1 + W_6^2) = \frac{1}{6} (1 + 2e^{j\pi/3} + e^{j2\pi/3}) = \frac{1}{6} (1 + 2e^{j\pi/3} + e^{j2\pi/3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{j\pi/6}$$

$$c(5) = \frac{1}{6} (1 + 2W_6^5 + W_6^4) = \frac{1}{6} (1 + 2W_6^{-1} + W_6^{-2}) = \frac{1}{6} (1 + 2e^{-j\pi/3} + e^{-j2\pi/3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-j\pi/6}$$

$$\Rightarrow x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{j\pi/6} W_6^{-n} + \frac{1}{6} W_6^{-n} + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-j\pi/6} W_6^{-n}$$

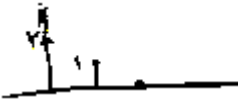
$$= \frac{1}{6} + \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{6} \cos n\pi$$

مثال: ضرایب DFS برای سیگنال پریودیک داده شده را بدست آورید.

$$\begin{aligned} x(n) &= 3 + \cos\left(\frac{2\pi \times 2n}{8}\right) + 2 \frac{2\pi}{8} \times 2n \\ &= 3 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 4\right) + 2 \frac{\pi}{2} \times 4 \Rightarrow c(0) = 3, \quad c(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow c(7) = c(1)^* = \frac{1}{4} \\ c(15) &= \frac{1}{4} \Rightarrow c(20) = c(15)^* = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

مثال: ضرایب $c(k)$ سیگنالی در شکل داده شده است، سیگنال را تعیین کنید.

جواب:



$$\begin{aligned} c(k) &= \frac{1}{4} (1 + W_N^k) \Rightarrow x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{4} (1 + W_N^k) W_N^{-kn} \\ x(0) &= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1 \\ x(1) &= 1 + \frac{1}{4} \times \frac{-1}{1} + \frac{1}{4} = 1 \\ x(2) &= 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1} = 1.5 \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi}{N} (1-n)\right)$$

۲-۵ تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته DTFT

تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $x(n)$ اینگونه تعریف می شود.

$$\begin{cases} DTFT \Rightarrow X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \\ IDTFT \Rightarrow x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$

IDTFT به سهولت از DTFT با توجه به

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

بدست می آید.

خواص DTFT

- در حالیکه $x(n)$ گسسته است $X(\omega)$ پیوسته است.
- DTFT را باید بصورت $x(e^{j\omega})$ نوشت که برای اختصار از نگارش $x(\omega)$ نیز استفاده می شود.
- دیمانسیون ω رادیان است و با دیمانسیون Ω ، رادیان بر ثانیه متفاوت است. در حقیقت ارتباط بین ω و Ω از رابطه $\Omega = \omega/T$ که در آن T پریود نمونه برداری است برقرار می گردد.
- تبدیل فوریه سیگنال $x(n)$ وجود دارد. اگر جمع قدرمطلق $x(n)$ محدود باشد. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$
- چون $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = Ex$ است پس $x(n)$ سیگنال انرژی است.
- تمام سیگنالهای پایدار دارای تبدیل فوریه هستند چراکه شرط های معادل یکدیگر دارند.
- تبدیل فوریه سیگنال $x(n)$ برابر با تبدیل Z سیگنال $x(n)$ روی دایره واحد است $X(\omega) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$ اگر دایره واحد جزء ROC مربوطه به $X(z)$ نباشد. $x(n)$ تبدیل فوریه ندارد.
- سیگنالهای مهمی وجود دارند که روی دایره واحد دارای قطب هستند. برای این سیگنالها در ω های قطبهای روی دایره واحد مقدار $X(\omega)$ بینهایت می شود و فوریه وجود ندارد. برای این سیگنالهای بسیار با همیت مانند پله و سیگنالهای مثلثاتی فوریه در حد، تعریف می شود.
- چون $H(\omega)$ پریودیک است، فرکانس پایین حول $2k\pi$ و فرکانس بالا حول $(2k+1)\pi$ است
- DTFT کاربرد تئوریک دارد و استفاده عملی ندارد، زیرا حد بینهایت در محاسبه آن به معنی تاخیر و حجم محاسباتی بینهایت است دیگر اینکه $X(\omega)$ پیوسته است.

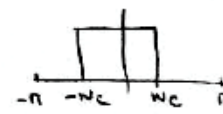
$X(\omega)$ با پریود 2π	$x(n)$ غیر پریودیک	
$aX(\omega) + bH(\omega)$	$ax(n) + bh(n)$	خطی
$e^{j\omega k} X(\omega)$	$x(n-m)$	شیفت
$X(\omega - \omega_0)$	$e^{-j\omega_0 n} x(n)$	
$X(-\omega)$	$x(-n)$	
$X^*(-\omega)$	$x^*(n)$	
$X(\omega)H(\omega)$	$x(n) \otimes h(n)$	کانولوشن
$X(\omega)H(-\omega)$	$rxh(l) = x(l) \otimes h(-l)$	همبستگی
$Sxx(\omega)$	$rxh(l)$ اگر $x(n)$ حقیقی باشد	

$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$	$nx(n)$	مشتق در میدان فرکانس
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\lambda) h(\omega - \lambda) d\lambda$	$x(n)h(n)$	ضرب
$\frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$	$x(n) \cos(n\omega_0)$	مدولاسیون
$X_e(\omega)$ $X_o(\omega)$ $Real[x(\omega)]$ $Imag[x(\omega)]$	$Real[x(n)]$ $Imag[x(n)]$ $x_e(n)$ $x_o(n)$	تقارن
$Ex = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) H^*(\omega) d\omega =$		رابطه پارسوال

چند تبدیل مهم

$X(\omega)$	$x(n)$	$X(\omega)$	$x(n)$
$\frac{1}{1 - r e^{j\omega} \cos \omega_p + r^2 e^{j2\omega}}$	$\frac{r^n \sin \omega_p (n+1)}{\sin \omega_p} u(n) \quad r < 1$	1	$\delta(n)$
$\frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$	$a^n u(n) \quad a < 1$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^n \delta(\omega + r n \ell)$	1
$\frac{1}{(1 - a e^{-j\omega})^r}$	$\binom{n+r-1}{r-1} a^n u(n) \quad a < 1$	$\frac{1}{1 - e^{j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} n \delta(\omega + r n \ell)$	$u(n)$
		$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^n \delta(\omega - \omega_0 + r n \ell)$	$e^{j n \omega_0}$

مثال ۱: $\rightarrow x(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1 \Rightarrow X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$

مثال ۲: $\rightarrow H(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \omega_c \end{cases}$

 $\Rightarrow h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{j\omega_c n}}{jn} - \frac{e^{-j\omega_c n}}{jn} \right) = \frac{\sin n \omega_c}{n \omega_c} \quad -\infty < n < \infty$

می سیم انرژی را محاسبه کنیم
 $\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} < \infty$
 این سیگنال همگراست.

مثال ۳: نشان دهید $DTFT$ سیگنال $x(n) = e^{j n \omega_0}$ است.
 $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^n \delta(\omega - \omega_0 + r n \ell) e^{j\omega n} d\omega = e^{j n \omega_0}$

مثال: $DTFT$ سیگنال $x=A$ را بدست آورید.

جواب: مقدار ثابت را با ۲ اکسپونانسیل مدل کرده میرایی آنرا به سمت صفر میل می دهیم

مثال ۱

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n e^{-jn\omega} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{-jn\omega}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} \right) d\omega = 2\pi$$

$a \rightarrow 1$

مثال: DTFT: سیگنال پله را حساب کنید.

مثال ۲

$$\frac{1}{1-a} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} = \frac{1}{1-a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$$

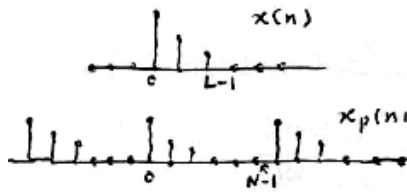
۵-۲-۱ تبدیل فوریه سیگنال گسسته طول محدود (DFT) Discrete Fourier Transform

طیف $X(\omega)$ پیوسته است و برای کاربرد دیجیتالی مناسب نیست.

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

اما وقتی سیگنال گسسته $x(n)$ طول محدود داشته باشد می توان بجای $X(\omega)$ از نمونه برداری شده آن، $X(k)$ برای معرفی طیف $x(n)$ استفاده کرد که به نام DFT شناخته می شود. برای این منظور

سیگنال $x(n)$ را از نظر ریاضی پریودیک با پریود $N \geq L$ در نظر می گیریم. اگر $N > L$ باشد به $x(n)$ صفر اضافه می کنیم تا $x_p(n)$ بدست آید.



$$x_p(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n-mN)$$

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & L \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

برای سیگنال پریودیک بدست آمده، DFS محاسبه می گردد.

$$c(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

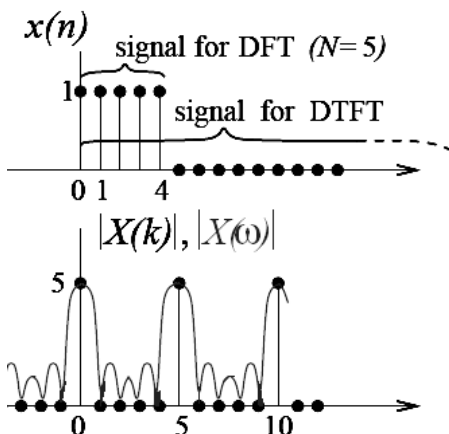
$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) e^{j2\pi kn/N}$$

در این رابطه در محدوده $0 \leq n \leq N-1$ مقدار $x_p(n) = x(n)$ است. اگر $X(k) = Nc(k)$ جایگزین شود نتایج ذیل بدست می آید.

$$Nc(k) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \bigg|_{\omega = \frac{2\pi k}{N}} = X(\omega) \bigg|_{\omega = \frac{2\pi k}{N}}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}$$

بر اساس روابط فوق DFT و $IDFT$ اینگونه نوشته می شود



$$\begin{cases} DFT \Rightarrow X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, & N \geq L \\ IDFT \Rightarrow x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \end{cases}$$

- تابع $X(k)$ ، تابعی فرکانس گسسته است که نشان داده می شود که نمونه برداری در نقاط متساوی الفاصله $k=0 \dots N-1$ $2\pi k/N$ از تابع $X(\omega)$ است.

بازسازی $x(n)$ و $X(\omega)$ از $X(k)$

الف) $x(n)$ را از $X(k)$ می توان بدست آورد، مشروط بر آنکه $L \leq N$ باشد در غیر

اینصورت درهم شدن زمانی ایجاد می شود. این درهم شدن مشابه درهم شدن فرکانسی است که در نمونه برداری از سیگنال آنالوگ اتفاق می افتد، اگر نایکوئیست ریت رعایت نشود. $IDFT(X(k))$ سیگنال پریودیک، $x_p(n)$ را می دهد که اولین پریود آن $0 \leq n \leq N-1$ سیگنال $x(n)$ است.

ب) بازسازی $X(\omega)$: DFT سیگنال $x(n)$ تابع $X(k)$ را می دهد که باید روشی برای بازسازی $X(\omega)$ یافت. برای این منظور به محاسبات ذیل دقت کنید. اگر $X(k)$ موجود باشد می توان نوشت:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

از جایگزینی این رابطه در رابطه $DTFT$ بدست می آید.

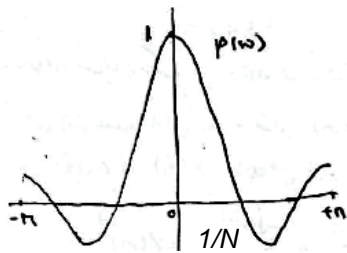
$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j[\omega - 2\pi k/N]n} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) P(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

تابع $P(\omega)$ تابع میان یابی است که بازسازی $X(\omega)$ از $X(k)$ را انجام می دهد. $P(\omega)$ برابر است با

$$P(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{N \sin(\omega/2)}$$

که برای $N=5$ در شکل نشان داده شده است. مقدار دامنه آن



$$P\left(\frac{k}{N}\right) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k=1,2,\dots,N-1 \end{cases}$$

است. به این ترتیب اولین نقطه صفر در $1/N$ است و عرض برآمدگی اصلی $2/N$ می گردد.

$X(\omega)$ از کانولو شن $P(\omega)$ و $X(k)$ مطابق فرمول فوق و یا از رابطه

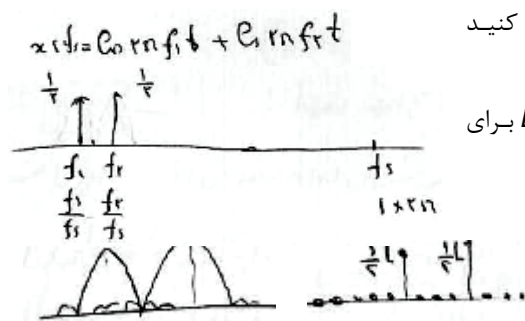
$$X(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{-j(\omega - 2\pi k/N)}}$$

قابل باز سازی است.

رزولوشن طیف

N رزولوشن طیف را تعیین می کند. اگر فاصله ۲ مولفه $2/N$ باشد، جمع شدن نقاط صفر مربوط به هر دو یک دره با دامنه صفر می دهد. اگر فاصله از این کمتر شود، عمق دره کاهش یافته تا جاییکه قله ایجاد می کند و دو مولفه ای که کنار یکدیگر هستند قابل تمییز نیستند. دامنه $P(\omega)$ در $0.5/N$ ، $0.6/N$ و $0.7/N$ بترتیب برابر 0.5 ، 0.64 و 0.3 است. بر این اساس اگر فاصله ۲ مولفه $1/N$ یا $1.2/N$ شود قله ای با دامنه 1.28 یا 1 (بدون دره بین دو مولفه) ایجاد می شود که امکان تفکیک ۲ مولفه را از بین می برد. برای اینکه ۲ مولفه مجاور قابل تفکیک باشند، حداقل فاصله باید بزرگتر از $1.4/N$ باشد. این فاصله را با انتخاب مناسب N باید تنظیم کرد.

$$\frac{\Delta f}{F_s} > \frac{1.2}{N}$$



مثال: سیگنالی از دو مولفه $F1$ و $F2$ تشکیل یافته است، حداقل L را تعیین کنید

که این دو مولفه در DFT قابل تفکیک باشند.

جواب: شکل طیف آنالوگ و دیجیتال این سیگنال را نشان می دهد. حداقل L برای

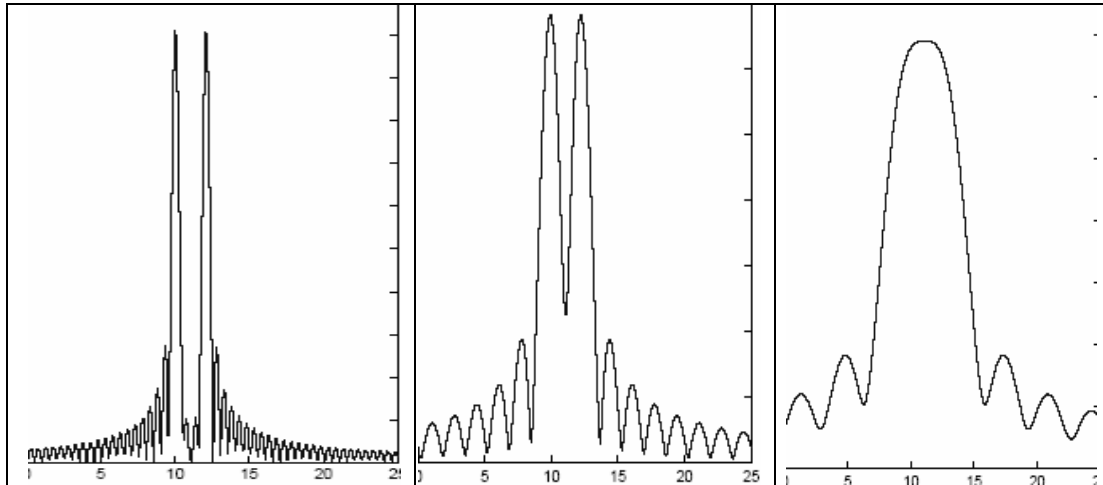
اینکه ۲ مولفه قابل تفکیک باشند از رابطه ذیل بدست می آید.

$$\frac{f_2 - f_1}{F_s} = \frac{\Delta f}{F_s} > \frac{1.2}{L}$$

در اینصورت $X(k)$ و $X(\omega)$ مطابق شکل خواهند شد.

مثال: ۲ سیگنال ۱۰ و ۱۲ هرتزی با فرکانس ۵۰ هرتز نمونه برداری شده اند. حداقل طول برای قابل تفکیک بودن ۲ مولفه چقدر است؟ طیف را برای طولهای ۱۵ و ۳۵ رسم کنید.

جواب: حداقل طول از روابط فوق برابر $L > 50 \times 1.2/2 = 30$ باید باشد. شکل طیف را برای $L=15$ و $L=35$ و $L=100$ را نشان می دهد.

محاسبه $X(k)$

اگر بردار $x(n)$ به طول L که به تعداد کافی صفر به آن افزوده شده باشد تا به طول N برسد، DFT سیگنال $x(n)$ با طول N بنام X_N از این رابطه بدست می آید که در آن W_N ماتریس $N \times N$ ثابت است.

$$DFT: \quad X = Wx.$$

$$IDFT: \quad x = 1/N W^* X$$

$$W = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$x = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$$

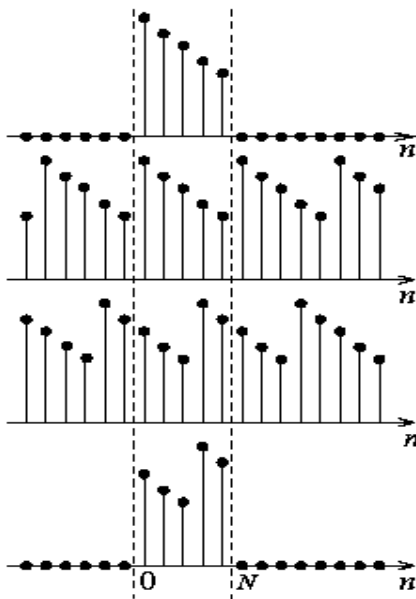
$$X = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$$

دستور $Xk = \text{fft}(x)$ در $MATLAB$ ، DFT سیگنال $x(n)$ را با الگوریتمهای سریع $Fast Fourier Transform(FFT)$ که در فصل ۸ بحث می شوند محاسبه می کند.

خواص DFT

$X(k)$ با پریود N که $L \leq N$	$x(n)$ با طول L	
$X(k+N)$	$x(n+N)$	پریودیک بودن
$aX(k) + bH(k)$	$ax(n) + bh(n)$	خطی
$W_N^{kl} X(k)$	$x(<n-m>_N)$	شیفت
$X(<k-l>_N)$	$W_N^{-ln} x(n)$	
$X(N-k)$	$x(N-n)$	
$X^*(N-k)$	$x^*(n)$	
$X(k)H(k)$	$x(n)Oh(n)$	کانولوشن دوار
$X(k)H^*(k)$	$rxh(l) = x(l)Oh^*(-l)$	همبستگی دوار
$\frac{1}{N} X(k)OH(k)$	$x(n)h(n)$	ضرب
$Ex = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)h^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)H^*(k) =$		رابطه پارسوال

شیفت و تقارن دوار



$X(k)$ که DFT سیگنال $x(n)$ است تابعی پریودیک با پریود N است. بنابراین شیفت و تقارن باید در رابطه با طول ثابت N مربوط به $X(k)$ تعریف می شود. DFT با پریود N مربوط به سیگنال $x(n)$ با طول L که $L \leq N$ است در حقیقت شباهتی با DFS سیگنال پریودیک

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$$

دارد. اگر $x_p(n)$ شیفت خطی k نقطه ای داشته باشد. می توان نوشت:

$$x_p(n-k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-k-lN)$$

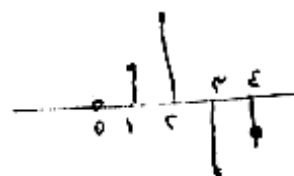
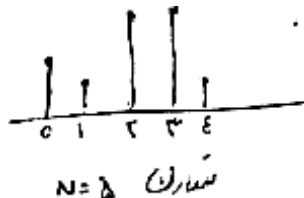
مقدار x_p بعد از شیفت در اولین پریود $l=0$ را می توان این گونه نوشت $x_p(n-k) = x(\langle n-k \rangle_N)$. بنابراین مقدار شیفت k را اگر بجای $x_p(n)$ روی $x(n)$ بررسی کنیم می بینیم که شیفت دوار صورت گرفته است. این موضوع در شکل نشان داده شده است.

همچنانکه در شکل نشان می دهد در نتیجه شیفت $x(0), x(\langle n-2 \rangle_N)$ به $n=3$, $x(1)$ به $n=4$ و $x(2)$ به 0 انتقال یافته است. نحوه دیگر نمایش این شیفت به این ترتیب است:

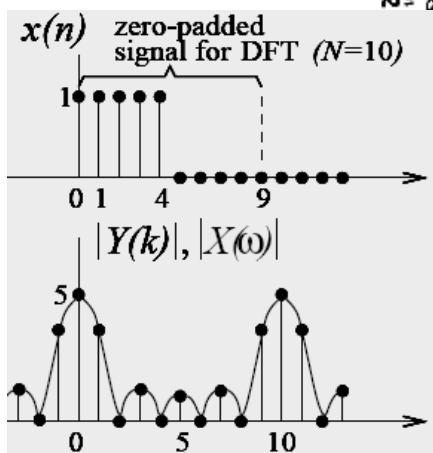
$$x(n) = \{1, 2, 4, 4\}, x(\langle n-2 \rangle_N) = \{3, 4, 1, 2\}$$



در مورد تقارن نیز نحوه بیان مسئله تغییر می کند به این ترتیب که سیگنال مزدوج متقارن $X(n) = X^*(N-n)$ و در مزدوج معکوس $(n) = -$ $X^*(N-n)$ باید باشد.



تقارن معکوس
 $N=5$



افزودن صفر به $x(n)$

اگر $X(w)$ $DTFT$ سیگنال $x(n)$ و $X(k)$ DFT سیگنال $x(n)$ باشد، وقتی به $x(n)$ صفر اضافه شود تا طول آن از $L=5$ به $N=10$ برسد متعاقباً پریود DFT از L به N افزایش می یابد. اگر $x'(n)$ همان $x(n)$ باشد که به آن صفر اضافه شده است می توان نشان داد که $X'(w) = X(w)$ ولی $X'(k) \neq X(k)$ است، زیرا که طول $X(k)$ برابر L است در حالیکه طول $X'(k)$ ، $N > L$ می باشد، اما هر دو نمونه گیری از یک تابع یعنی $X(w)$ ولی با تعداد نمونه گیری های متفاوت می باشند، به نحوی

$$x'(k) = X(w) \Big|_{w = \frac{2\pi k}{N}} \quad \text{و} \quad x(k) = X(w) \Big|_{w = \frac{2\pi k}{L}} \quad \text{که}$$

کانولوشن خطی و دوار

وقتی سیگنال $x(n)$ با طول L به سیستمی با پاسخ ضربه $h(n)$ با طول M اعمال شود خروجی سیستم با کانولوشن خطی بدست می آید.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{L+M-1} x(k) h(n-k)$$

بنابراین خروجی طول $L+M-1$ دارد. این رابطه را با $DTFT$ ، $y(w)=X(w)h(w)$ و یا با تبدیل z ، $y(z)=X(z)H(z)$ می توان نوشت این مکانیزی است که سیستمها بر روی ورودی تاثیر می گذارند که به آن کانولوشن خطی گفته می شود.

در کانولوشن دوار پیود N برابر $\max\{M,L\}$ انتخاب می گردد. کانولوشن دوار از رابطه ذیل بدست می آید

$$y_c(n) = x(n) \otimes h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) h(\langle n-k \rangle_N)$$

این رابطه با DFT بصورت $Y_c(k)=X(k)H(k)$ نیز می توان بیان کرد. در این روابط طول $X(k)$ ، $H(k)$ و $Y_c(k)$ برابر N است. اگر قرار باشد $y_c(n)$ ارتباطی با خروجی سیستم داشته باشد باید حداقل طول $L+M-1$ را پیدا کند. بنابراین ضرب DFT های $h(n)$ و $x(n)$ یا کانولوشن دوار دو سیگنال کاملاً بی استفاده است چراکه هدف اصلی یعنی بدست آوردن خروجی سیستم که کانولوشن برای آن کاربرد دارد را تامین نمی کند.

برای رفع این مشکل $h(n)$ و $x(n)$ را با افزودن صفر به طول $N \geq L+M-1$ گسترش می یابد حالا کانولوشن دوار را رابطه

$$y_c(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) h(\langle n-k \rangle_N)$$

و $Y_c(k)=X(k)H(k)$ بیان می کند که تمام عوامل آن از جمله $y_c(n)$ طول $L+M-1$ دارند. تحت این شرایط $y_c(n)$ برابر $y(n)$ می گردد یعنی کانولوشن دوار و کانولوشن خطی هر دو $y(n)$ یکسان که خروجی سیستم است تولید می کنند. به این ترتیب DFT می تواند در کاربرد فیلتر کردن مورد استفاده قرار گیرد.

عین موضوع فوق برای کورلیشن نیز صادق است.

بنابراین:

برای اینکه DFT و کانولوشن دوار برای محاسبه خروجی سیستمها مناسب باشند باید حداقل طول $L+M-1$ داشته باشند که L طول ورودی و M طول پاسخ ضربه سیستم باشد. به این ترتیب نتیجه عملکرد DFT و کانولوشن دوار با $DTFT$ و کانولوشن خطی قابل تطبیق می شود.

مثال: $x_1(n) = \{1, 2, 3\}$ و $h_1(n) = \{1, 2, 3\}$ در نظر بگیرید. عمل کانولوشن دوار

کانولوشن خطی، در زمان طولانی کند.

عمل کانولوشن دوار: $N = \max\{3, 3\} = 3$

$$y_c(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k) h_1(\langle n-k \rangle_3)$$

$n=0 \Rightarrow h(\langle 0-k \rangle_3) =$

$n=1 \Rightarrow h(\langle 1-k \rangle_3)$

$n=2 \Rightarrow h(\langle 2-k \rangle_3)$

$n=3 \Rightarrow h(\langle 3-k \rangle_3)$

$y_c(n) = \{10, 14, 10, 10\}$

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^3 x_1(n) e^{-j \frac{2\pi}{4} kn} = 1 + e^{-j \frac{2\pi}{4} k} + e^{-j \frac{2\pi}{4} 2k} + e^{-j \frac{2\pi}{4} 3k} \quad \text{ZDFT, DFT (b)}$$

$$\Rightarrow x_1(k) = \{4, 0, 1, 0\}$$

$$H_1(k) = \sum_{n=0}^3 h_1(n) e^{-j \frac{2\pi}{4} kn} = 1 + 2e^{-j \frac{2\pi}{4} k} + 2e^{-j \frac{2\pi}{4} 2k}$$

$$H_1(k) = \{4, -1-j, 2, -1+j\}$$

$$Y_c(k) = X_1(k) H_1(k) = \{3, 0, 2, 0\}$$

$$y_c(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 Y_c(k) e^{j \frac{2\pi}{4} kn} = \frac{1}{4} (3 + 2e^{j \frac{2\pi}{4} n}) \quad n=0,1,2,3 \quad \text{ZDFT برای بست کردن } y_c(n)$$

$$\Rightarrow y_c(n) = \{1, 1, 1, 1\}$$

هر دو نتیجه، از روش کانولوشن دوار و IDFT, DFT با یکدیگر تطبیق دارند

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$

(d) کانولوشن خطی

2	1	2	1
	1	2	3
4	3	4	3
4	2	4	2
2	1	2	1
2	5	10	8

$$\Rightarrow y(n) = \{2, 5, 10, 8, 8, 3\}$$

ایده می شود $y(n) \neq y_c(n)$ است.

۱- بنابراین کانولوشن دوار کار کانولوشن خطی را انجام نمی دهد و برای بدست آوردن پاسخ سیستمها مناسب نیست، مگر آنکه با طول

$N \geq L+M-1$ محاسبه شود که L طول ورودی و M طول پاسخ ضربه سیستم باشد.

$$y_c(n) = \sum_{k=0}^N x(n) h(n-k)$$

(e) کانولوشن دوار با طول $N=4+4-1=7$ برابر طول کانولوشن خطی

2	1	2	1
	1	2	3
0	0	4	3
	4	2	4
2	1	2	1
2	5	10	8

$$\Rightarrow y_c(n) = \{2, 5, 10, 8, 8, 3\}$$

$$= y(n)$$

ایده می شود $y_c(n)$ برابر $y(n)$ است $N=7$ نتیجه کانولوشن خطی در راه می آید

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^4 x_1(n) W_N^{kn} = 1 + W_N^k + 2W_N^{2k} + W_N^{3k}$$

$N=7$ IDFT, DFT

$$\Rightarrow x_1(k) = \{4, 1, 0, -j, 1, 0, j\}$$

$$H_1(k) = \sum_{n=0}^4 h_1(n) W_N^{kn} = 1 + 2W_N^k + 2W_N^{2k} = \{4, 1, 0, -j, 1, 0, j\}$$

$$Y_1(k) = X_1(k) H_1(k) = \{3, 1, 0, -j, 1, 0, j\}$$

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W_N^{-kn} = \{2, 5, 10, 8, 8, 2\}$$

$$Y(k) = (2 + W_N^k + 2W_N^{2k} + W_N^{3k})(1 + 2W_N^k + 2W_N^{2k} + W_N^{3k}) =$$

$$2 + 5W_N^k + 10W_N^{2k} + 8W_N^{3k} + 8W_N^{4k} + 2W_N^{5k}$$

$$g(n) = \{2, 5, 10, 8, 8, 2\}$$

محاسبه تفرق با استفاده از نسبت به هم
این رابطه جزئی است از DFT

از مقایسه ۴ روش انجام شده نتایج ذیل را می توان استخراج کرد.

کانولوشن دوار دو سیگنال $x_1(n)$ و $x_2(n)$ همیشه برابر است با $IDFT(X_1(k)X_2(k))$ با پیروی $N = \max\{L_1, L_2\}$ که L_1 و L_2 طول های $x_1(n)$ و $x_2(n)$ هستند

کانولوشن خطی دو سیگنال $x_1(n)$ و $x_2(n)$ همیشه برابر است با $IDFT(X_1(k), X_2(k))$ مشروط بر آنکه $N \geq L_1$ باشد.

بنابراین $LDFT$ ضرب DFT در سیگنال الزاما منجر به انجام کانولوشن خطی نمی شود مگر آنکه شرط رعایت شده باشد. برای انجام کانولوشن دوار نیز می توان از انجام ضرب مخصوص که برای نوشتن خطی استفاده شد استفاده کرد. مانند آنچه در قسمت e مورد استفاده قرار گرفت. ذیلا محاسبات کانولوشن دوار قسمت a را به روش ضرب ارائه می کنیم که در آن $N=4$ باشد.

$$\begin{array}{r} \leftarrow 4 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\ \hline 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 4 \quad 8 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 10 \quad 8 \quad 10 \quad 8 \end{array}$$

نکته دیگر اینکه کانولوشن دو سیگنال طول ۶ دارد. بنابراین مطابق بحث قسمت DFT زمانی $y(n)$ قابل بازسازی است که DFT طولی بزرگتر از ۶ داشته باشد در غیر این صورت هم پوششی در میدان زمان (مشابه صفرناجایی در میدان فرکانس) پدید می آید. وقتی در این مثال ۴ بیت DFT گرفته می شود این مشکل پدید می آید. محاسبات ذیل نحوه هم پوششی را نشان می دهد.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \\ \hline 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 2 \quad 5 \quad 10 \quad 8 \quad 8 \quad 2 \\ \hline 10 \quad 8 \quad 10 \quad 8 \quad 10 \quad 8 \end{array}$$

هم پوششی
نمی توانیم هیچ کاری با این مشکل
نماییم

چون $N=4$ منظور شده و کافی نیست پیوندهای مجاور با هم پوششی پیدا کرده اند و جواب غلط (بنابراین کانولوشن خطی) بدست آمده است. اگر $N=6$ منظور شود پیوندهای مجاور بر روی هم اثر نداشته و در نتیجه همان کانولوشن خطی می گردد.

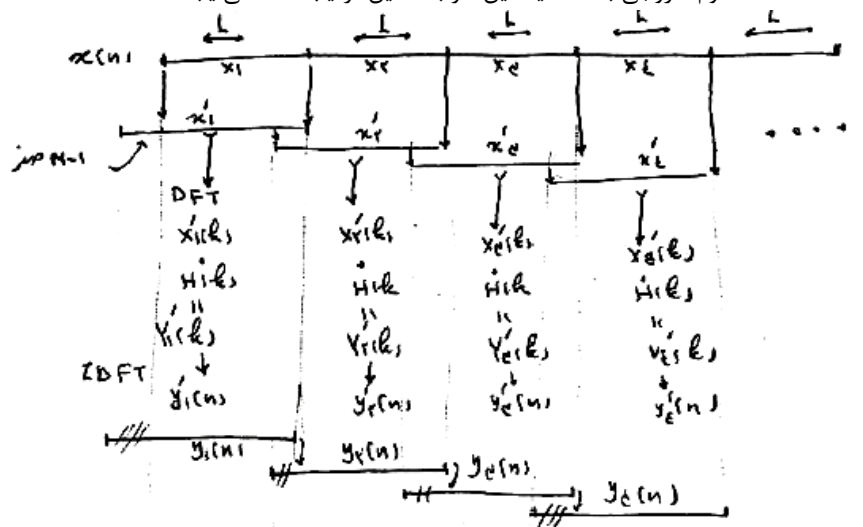
فیلتر کردن دنباله های بلند با DFT

هدف انجام کانولوشن خطی با استفاده از DFT است. سیستمی با پاسخ ضربه $h(n)$ با طول M سیگنال ورودی $x(n)$ با طول نامحدود را فیلتر می کند. برای این منظور سیگنال $x(n)$ به قطعاتی با طول $L > M$ تقسیم می شود. و سپس از DFT ، $1DFT$ برای انجام کانولوشن خطی استفاده می گردد. برای انجام این کار دو روش وجود دارد.

روش overlap-save

در این روش طول DFT برابر $N=L+M-1$ در نظر گرفته می شود. DFT سیگنال پاسخ ضربه $h(n)$ با طول N یک بار محاسبه می شود، $H(k)$. سپس اولین قطعه سیگنال $x(n)$ با طول L انتخاب شده $x_1(n)$ و در ابتدای آن $M-1$ صفر اضافه می شود تا طول x_1 به $L+M-1$ برسد. سپس DFT سیگنال x_1 با طول N گرفته می شود، $X_1(k)$. سیگنال خروجی $Y(k)$ با گرفتن $IDFT$ از $Y(k)$

سیگنالی بدست می آید که $M-1$ نقطه اول آن کنار گذاشته و L مقدار باقیمانده $y_1(n)$ اولین قطعه خروجی است. سپس قطعه دوم x_2 انتخاب شده و به اول آن $M-1$ نقطه از آخر x_1 اضافه شده عمل DFT انجام گردیده و $M-1$ نقطه خروجی کنار گذاشته شده تا L نقطه دوم خروجی بدست آید. این امر به همین ترتیب ادامه می یابد.



روش Qoverlap-Add

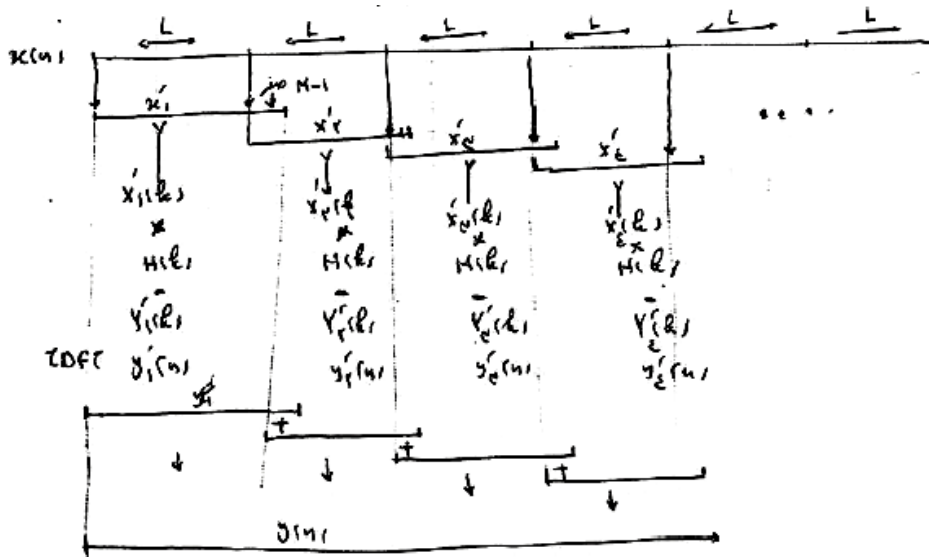
نحوه انجام این روش به این ترتیب است که :

DFT تابع ضربه $h(n)$ با طول $N=L+M-1$ یکبار گرفته می شود $H(k)$

سیگنال $x(n)$ به قطعاتی به طول L تقسیم می گردد که قطعه اول x_1 و به همین ترتیب x_2 و

به انتهای x_1 تعداد $M-1$ صفر اضافه شده تا x'_1 بدست آید که DFT آن $X'_1(k)$ در $H(k)$ ضرب و $Y'_1(k)$ بدست می آید. $IDFT$ سیگنال $Y'_1(k)$ سیگنال $y'_1(n)$ را می دهد که $L-(M-1)$ نقطه اول آن $L-(M-1)$ نقطه از سیگنال $y(n)$ است.

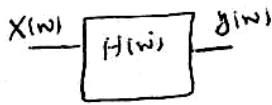
سپس x_2 انتخاب شده، x'_2 ، $X'_2(k)$ ، $Y'_2(k)$ و $y'_2(n)$ تولید می گردد. $M-1$ نقطه آخر $y'_2(n)$ به $M-1$ نقطه اول $y'_2(n)$ اضافه شده تا $M-1$ نقطه دیگر $y(n)$ بدست آید. سرنوشت $M-1$ نقطه آخر، با تعیین $M-1$ نقطه اول $y'_3(n)$ روشن می شود که با جمع شدن آنها با یکدیگر $y(n)$ نیز بدست می آید.



این روش را در $MATLAB$ با دستور $y = \text{fftfilt}(h, x, r)$ انجام می شود. در این دستور پاسخ ضربه h با طول M و دنباله ورودی x که به طولهای $L=r$ تقسیم می شود، می باشد. اگر r معرفی نشود طول ۵۱۲ را انتخاب می کند.

۳-۵ تحلیل سیستم در میدان فرکانس

۱- پاسخ فرکانسی



سیستمی با پاسخ ضربه $h(n)$ در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی این سیستم تبدیل فوریه سیگنال $h(n)$ است.

$$H(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-jwn}$$

اثبات: فرض کنید سیستم با ورودی $x(n) = e^{jwn}$ تحریک گردد. می توانیم بنویسیم.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{jw(n-k)} = e^{jwn} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-jwk} \right]$$

$$\Rightarrow y(n) = H(w) e^{jwn}$$

از اینروست که به فوریه $h(n)$ پاسخ فرکانسی سیستم می گویند زیرا ارتباط بین ورودی و خروجی ماندگار در نتیجه تغییر فرکانسی ورودی w را نشان می دهد.

$H(w)$ را به سهولت می توان از تابع تبدیل سیستم نیز بدست آورد.

$$H(w) = H(z) \Big|_{z=e^{jw}}$$

$H(w)$ تابعی کمپلکس است که آنرا می توان بصورت قطبی نوشت

$$H(w) = |H(w)| e^{j\varphi(w)}$$

در این رابطه $|H(w)|$ دامنه پاسخ و $\varphi(w)$ فاز پاسخ است. نمایش $H(w)$ به صورت کارترین از اینقرار است.

$$H(w) = H_R(w) + j H_I(w) \quad |H(w)| = \sqrt{H_R^2(w) + H_I^2(w)}$$

$$\varphi(w) = \tan^{-1} \frac{H_I(w)}{H_R(w)}$$

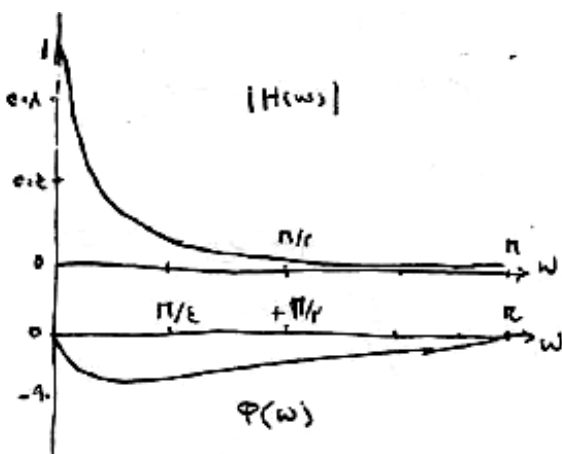
مثال ۱: تابع تبدیل و پاسخ فرکانسی سیستم داده شده را بدست آورید.

$$y(n] = ay(n-1) + bx(n), \quad 0 < a < 1$$

$$H(z) = \frac{b}{1-az^{-1}}$$

$$\text{ROC: } |z| > |a|$$

$$H(w) = H(z) \Big|_{z=e^{jw}} = \frac{b}{1-ae^{-jw}} =$$



$$|H(w)| e^{j\varphi(w)} = \left| \frac{b}{1-ae^{-jw}} \right| e^{j\varphi(w)}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{(1-a\cos w)^2 + (a\sin w)^2}} e^{j\varphi(w)}$$

$$\varphi(w) = \tan^{-1} \frac{a\sin w}{1-a\cos w}$$

۲- پاسخ سیستم به ورودی سینوسی (ماندگار):

در قسمت قبل نشان داده شد که پاسخ سیستم به ورودی $x = e^{jn\omega}$ برابر $y(n) = H(j\omega)e^{jn\omega}$ است. براین اساس پاسخ سیستم به ورودی سینوسی را می توان اینگونه نوشت.

$$x(n) = A \cos(n\omega + \varphi)$$

$$y(n) = A |H(j\omega)| \cos(n\omega + \varphi + \varphi_H(j\omega))$$

$$x(n) = 5 + 12 \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 2\right) \cos(n\pi + \frac{\pi}{4})$$

مثال: پاسخ سیستم مثال ۱ به ورودی سینوسی

$$\Rightarrow y(n) = 5 |H(j\omega)|_{\omega=\pi} + 12 |H(j\omega)|_{\omega=\frac{\pi}{4}} \cos\left(n\frac{\pi}{4} + \varphi_1\right) + 2 |H(j\omega)|_{\omega=\pi} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4} + \varphi_2\right)$$

$$\varphi_1 = \varphi_H(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{\pi}{4}}, \quad \varphi_2 = \varphi_H(j\omega) \Big|_{\omega=\pi} \Rightarrow$$

$$y(n) = 5 \times \frac{b}{1-\alpha} + 12 \times \frac{b}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cos\left[n\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}(\alpha)\right] + 2 \times \frac{b}{1+\alpha} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

۳- سیستم بدون اعوجاج

سیستم بدون اعوجاج سیستمی است که ورودی را فقط احتمالات تقویت (تضعیف) و تاخیر می دهد. $y(n) = Ax(n-n_0)$ اعوجاج دامنه: اگر $|H(\omega)|$ در باند مورد نظر $\omega_1 < \omega < \omega_2$ ثابت نباشد، اعوجاج دامنه پیش می آید. دامنه شکل a اعوجاج دامنه در پی ندارد ولی دامنه پاسخ فرکانسی شکل b ایجاد اعوجاج در دامنه خروجی نسبت به ورودی می کند.

اعوجاج فاز: اگر $\phi(\omega) = 0$ باشد به آن سیستم صفر فاز *Zero phase* می گویند. سیستمی که در آن $\phi(\omega) = \alpha\omega$ باشد سیستم خطی فاز نامیده می شود. *Linear phase* و در غیر این دو صورت فاز سیستم غیر خطی است و باعث اعوجاج فاز سیگنال خروجی نسبت به ورودی می شود. برای معرفی مشخصات فازی سیستم، از تابع تاخیر جمعی *Group delay* استفاده می شود

$$\tau_\omega = -\frac{d}{d\omega} \varphi_H(j\omega)$$

اگر τ_ω ثابت باشد سیستم خطی فاز است، در غیر این صورت فاز سیستم غیر خطی است و انحراف τ_ω از ثابت مقدار غیر خطی بودن فاز را نشان می دهد.

مثال: اگر $\phi(\omega) = 2\omega$ باشد سیستم خطی فاز و اگر مثلاً $\phi(\omega) = \tan^{-1}(\omega)$ شود سیستم غیر خطی فاز است.

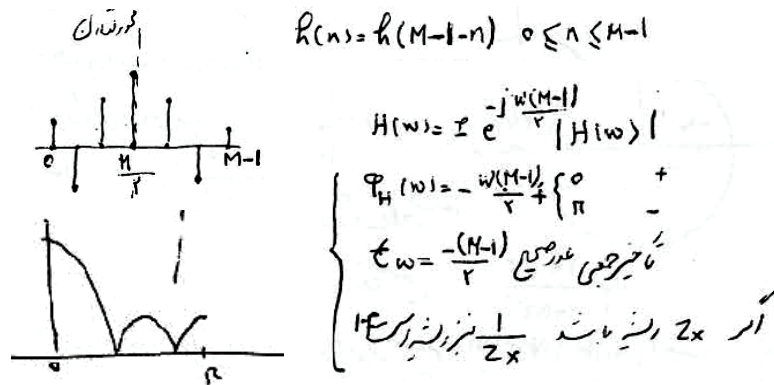
۴- نمونه هایی از سیستمهای خطی فاز

سیستمهای خطی فاز پاسخ فرکانسی $|H(j\omega)|e^{-j\omega n_0}$ دارند که متشکل از دو قسمت آنرا می توان دید. $|H(\omega)|$ سیستم صفر فاز + تاخیر α . از آنجائیکه سیستم صفر فاز غیر علی است و نمی توان آنرا ساخت، این تجزیه کمکی نمی کند ولی سیستمهای *FIR* که قابل ساخت هستند تحت شرایطی سیستمهای خطی فاز را می توانند بسازند.

خطی بودن فاز سیستمها را بصورت تعمیم یافته $\phi(\omega) = \alpha\omega + \beta$ نیز می نویسند. تاخیر جمعی این سیستمها ثابت است به استثنای پرهایی که ناشی از ناپیوستگی در $\phi(\omega)$ ممکن است وجود داشته باشد (مثال ۲۱ این فصل را ملاحظه کنید)

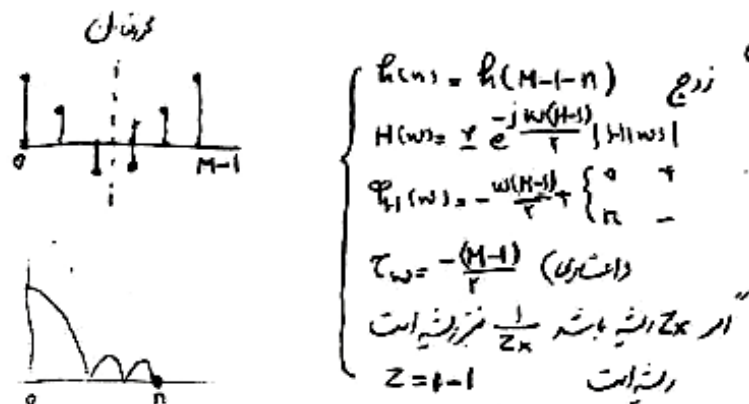
سیستم *FIR* خطی فاز *LPFIR* نوع ۱

در این سیستم $h(n)$ زوج و طول آن برابر M فرد است. پاسخ فرکانسی این سیستم بصورت ذیل است.



سیستم FIR خطی فاز LPFIR نوع ۲

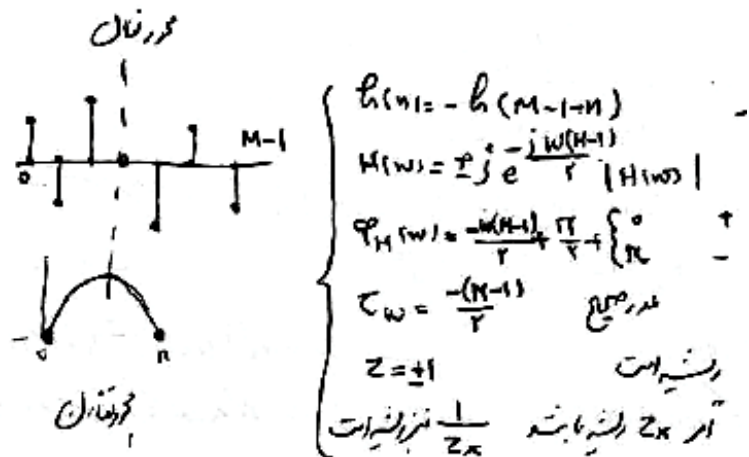
در این سیستم $h(n)$ زوج و طول آن برابر M زوج است. پاسخ فرکانسی این سیستم بصورت ذیل است.



به دلیل اینکه $Z = -1$ ریشه است، با این سیستم نمی توان فیلتر HP ساخت.

سیستم FIR خطی فاز LPFIR نوع ۳

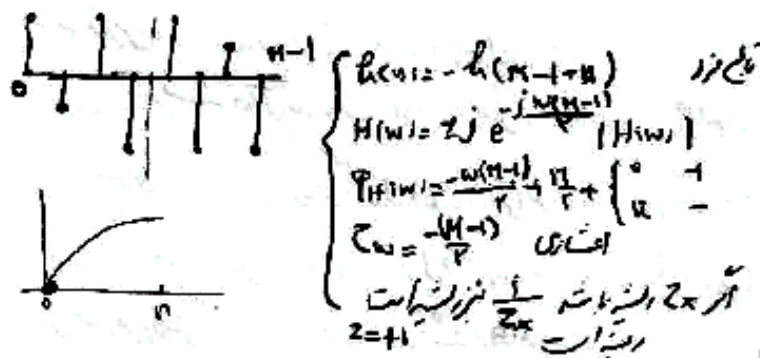
در این سیستم $h(n)$ فرد و طول آن برابر M فرد است. پاسخ فرکانسی این سیستم بصورت ذیل است.



به دلیل اینکه $Z = -1$ و $Z = 1$ هر دو ریشه هستند، با این سیستم نمی توان فیلتر LP و HP ساخت.

سیستم FIR خطی فاز LPFIR نوع ۴

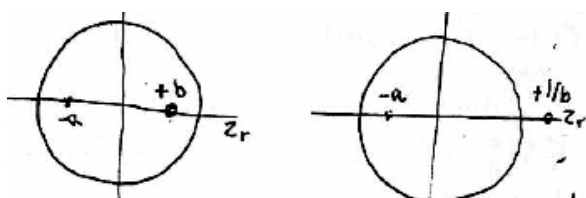
در این سیستم $h(n)$ فرد و طول آن برابر M زوج است. پاسخ فرکانسی این سیستم بصورت ذیل است.



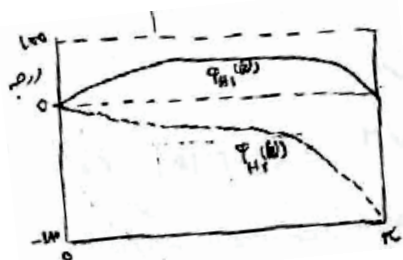
به دلیل اینکه $Z=1$ ریشه است ($w=0\pi$) با این سیستم نمی توان فیلتر LP ساخت.

۵- سیستم حداقل فاز:

سیستم حداقل فاز سیستمی علی است که قطبها و صفرهای آن داخل دایره واحد قرار دارند و $H(0) > 0$ است. سیستم حداقل فاز دارای



محدوده تغییرات فاز کمتر نسبت به تمام سیستمهایی است که جملکی دامنه پاسخ فرکانسی مشابه دارند. اگر $H(0) > 0$ باشد، تغییرات فاز اطراف صفر است و اگر $H(0) < 0$ باشد آنوقت تغییرات به محدوده π انتقال می یابد. به همین ترتیب می توان نشان داد که تاخیر جمعی سیستم حداقل فاز کمتر از دیگر سیستمها با دامنه پاسخ فرکانسی مشابه است.



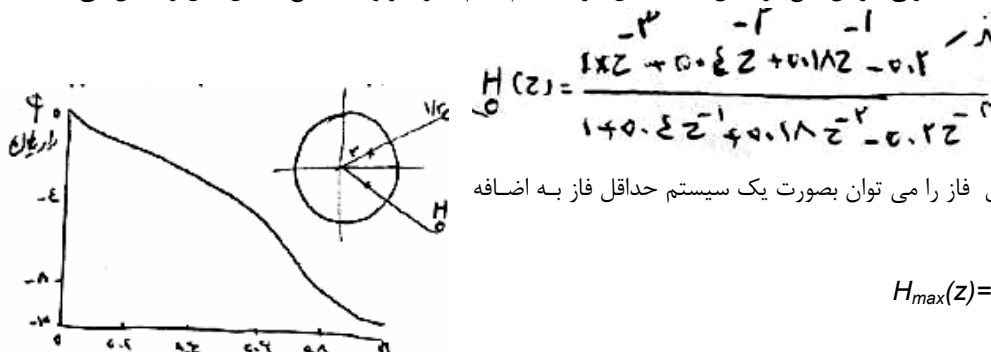
مثال: در سیستم $H_1(z) = \frac{1-bz^{-1}}{1+az^{-1}}$ صفرها و قطبها داخل دیسک واحد هستند، به این سیستم حداقل فاز گفته می شود. ولی سیستم $H_2(z) = \frac{z^{-1}-b}{1+az^{-1}}$ سیستمی غیر حداقل فاز است. برای این دو سیستم می توان نوشت $|H_1(w)| = |H_2(w)|$ ولی فاز آنها متفاوت است. شکل فازها را نشان می دهد.

۶- سیستم تمام گذر All Pass

تابع تبدیل یک سیستم تمام گذر برابر است با

$$H(z) = z^{-M} \frac{D_M^*(z^{-1})}{D_M(z)} \quad D_M(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_M z^{-M}$$

دامنه این سیستم $|H(w)| = 1$ ولی فاز آن تابع فرکانس است شکل فاز سیستم تمام گذر مربوط به تابع تبدیل ذیل را نشان می دهد.



یک سیستم غیر حداقل فاز را می توان بصورت یک سیستم حداقل فاز به اضافه یک تمام گذر نوشت

$$H_{max}(z) = H_{min}(z) + H_{allpass}(z)$$

در این سیستمها

$$z = \frac{1}{r} e^{-j\varphi} \quad \text{قطب باشد} \quad p = r e^{j\varphi} \quad (r < 1) \quad \text{اگر}$$

صفر است. به عبارت دیگر صفرها

$z = 1/p$ می باشند که قطب p پایدار است.

(b) این سیستمها *lossless* پایدار و علی طرح می شوند.

دامنه سیستم در تمام محدوده فرکانسی برابر ۱ و فاز آن از ۰ تا $M\pi$ تغییر می کند که M درجه سیستم است.

۷- سیستم معکوس *Invesrse*

سیستم معکوس، معکوس تابع تبدیل $H(z)$ است، $H_{inv}(z) = 1/H(z)$

است. اگر سیستم حداقل فاز باشد معکوس آن نیز حداقل فاز است و در سیستم معکوس نسبت به سیستم اصلی جای صفرها و قطبها عوض می گردد.

کاربرد معکوس سستم برای بازیابی سیگنال ورودی واقعی استف وقتی سیگنالی از کانال عبور کند که ممکن است دچار اعوجاج شود حال اگر خروجی و مشخصات کانال مشخص باشند، با عبور سیگنال خروجی از سیستم معکوس کانال ورودی، بدست می آید.

$$X(z) = H_{inv}(z)Y(z)$$

در این خصوص در بخش شناسایی سستم ها بحث بیشتری خواهد شد.

۵-۳-۱ رسم پاسخ فرکانسی

دستور *freqz* مربوط به *MATLAB* دامنه و فاز پاسخ فرکانسی را محاسبه می کند. $H = \text{freqz}(\text{num}, \text{den}, w)$

در این دستور *num* و *den* ضرایب تابع تبدیل سیستم و w محدوده فرکانسی مورد تقاضا است. بردار H حاوی مقدار پاسخ فرکانسی سیستم که اعداد کمپلکس می باشد هست.

$$x(e^{jw}) = \frac{0.008 - 0.044e^{-jw} + 0.05e^{-2jw} - 0.044e^{-3jw} + 0.008e^{-4jw}}{1 + 1.17e^{-jw} + 1.17e^{-2jw} + 1.12e^{-3jw} + 0.41e^{-4jw}}$$

را رسم کنید.

مثال: پاسخ فرکانسی سیستم

$$\text{num} = [0.008 - 0.044 \ 0.05 - 0.044 \ 0.008]$$

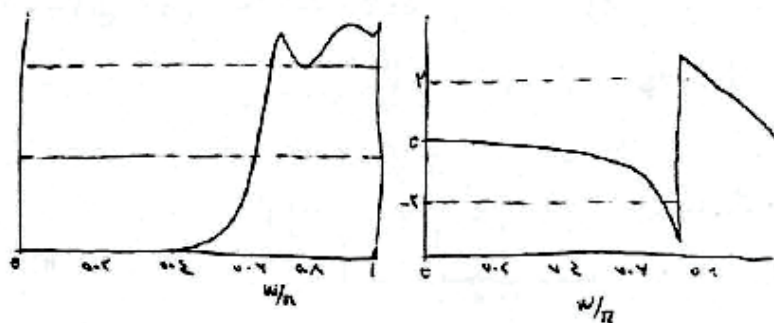
$$\text{den} = [1 \ 1.17 \ 1.17 \ 1.12 \ 0.41]$$

$$w = 0: \pi/256: \pi$$

$$h = \text{freqz}(\text{num}, \text{den}, w)$$

$$\text{plot}(\frac{w}{\pi}, \text{abs}(h))$$

$$\text{plot}(\frac{w}{\pi}, \text{angle}(h))$$



برای رسم پاسخ فرکانسی بغیر از استفاده از کامپیوتر را حا ساده ای مانند آنچه در نمودار بد استفاده می شود و جود ندارد. لذا عدد گذاری تنها راه آنالیتیکی رسم پاسخ فرکانسی است. ولی کما کان می توان از روش گرافیکی برای رسم تقریبی پاسخ فرکانسی سود برد. اگر $H(z)$ را بصورت جملات درجه ۱ از Z بنویسیم و سپس از رابطه لگاریتم گرفته، ضربها بصورت جمع ظاهر شوند.

$$H(z) = K \frac{\prod (z + z_i)}{\prod (z + p_i)} \Rightarrow \log |H(w)| = \log K + \sum_i \log |z + z_i| - \sum_i \log |z + p_i|$$

در رسم پاسخ فرکانسی سیستم گسسته، لگاریتمی کردن محور افقی سودی در پی ندارد زیرا منجر به مجانبهای خطی مانند آنچه در مورد سیستمهای آنالوگ اتفاق می افت نخواهد شد.

برای تسهیل در رسم پاسخ فرکانسی می توان از روش گرافیکی استفاده کرد که نموداری تقریبی ولی با حجم عملیات کم ریاضی را فراهم می آورد. برای این منظور باید از خط کش و نقاله استفاده کرد.

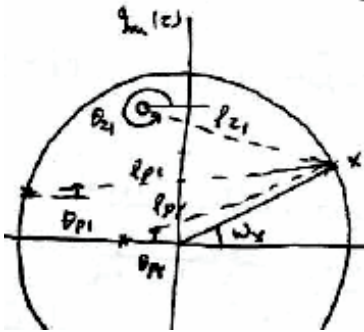
قطبها و صفرها را در صفحه Z علامت بزنید. (بصورت فرضی در شکل ۲ قطب و یک صفر علامت زده شده است)

نقطه ای روی دایره به شعاع واحد انتخاب (نقطه X) که زاویه آن ω رادیان باشد.

از صفرها و قطبها به X وصل کنید.

بسهولت می توان نشان داد که زاویه پاسخ فرکانسی برابر مجموع زاویه صفرها منهای زاویه

قطبها و دامنه پاسخ فرکانسی حاصل تقسیم ضرب صفرها بر ضرب دامنه قطبها است.



$$\varphi_H(\omega) = \sum \theta_{z_i} - \sum \theta_{p_i} \quad |H(\omega)| = K \cdot \frac{\text{محصول دایره صفرها تا X}}{\text{محصول ضرب دایره قطبها تا X}}$$

مسئله حل شده و تکرار نماند

① برای سنجش های زیری DFS (تکرار پذیر باشد) - DTFT - رابطه با سوال ، $P_{xx}(\omega)$ را بدست آورید.

$$a) \cos(n\frac{\pi}{4}) \cos(n\frac{\pi}{8}) \quad b) \cos(\sqrt{2}n) \quad c) x[n] = \{1, 0, 0, 0, 1\}$$

$$[DFS \Rightarrow a) c(1) = c(-1) = \frac{1}{2}, c(-3) = c(3) = \frac{1}{2}, b) \text{ ندارد} \quad]$$

$$c) c(0) = 0.5\Delta\epsilon, c(1) = c(4) = 0.242, c(2) = c(3) = 0.0387$$

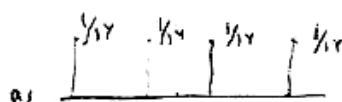
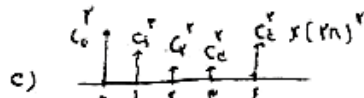
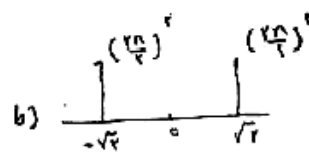
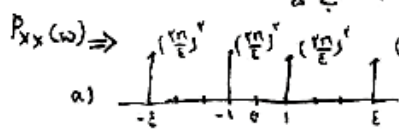
$$DTFT \Rightarrow a) x(\omega) = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega \pm \frac{\pi}{4}) + \delta(\omega \pm \frac{\pi}{8})], b) x(\omega) = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega \pm \sqrt{2})]$$

$$c) x(\omega) = \pi [\gamma\Delta\epsilon\delta(\omega) + 0.242\delta(\omega \pm \frac{\pi}{8}) + 0.0387\delta(\omega \pm \frac{\pi}{4})]$$

$$P_{xx}(\omega) \Rightarrow a) \sum c(k)^2 = \frac{1}{16} \sum x(n)^2 = \frac{1}{2}$$

b) ندارد

$$c) \sum c(k)^2 = \frac{1}{8} \sum x(n)^2 = 0.4$$

* هر $P_{xx}(\omega) = x(\omega)x(\omega)^*$ ضرب $x[n]$ با خودش تکرار می شود② سنجش های زیری DFS $\{ \dots, 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 1, 0.5, 0.25, 0, \dots \}$ را تکرار کنید

$$[2 + 2 \cos n\frac{\pi}{4} + \cos 2n\frac{\pi}{4} + 0.5 \cos 4n\frac{\pi}{4} \quad]$$

③ DFT ، DTFT نسبت به دوطرف تبدیل $x[n]$ به $S_{xx}(\omega)$ داریم ، رابطه با سوال تکرار کنید.

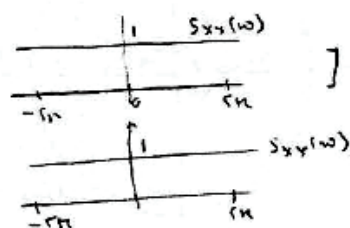
$$a) \delta(n) \quad b) \delta(n-l) \quad c) a^n u(n)$$

$$[DTFT a) x(\omega) = 1, x[k] = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$$

$$E_x = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega) d\omega = 1$$

$$b) x(\omega) = e^{-j\omega l}, x[k] = W_N^{-kl} \quad N > k > 0$$

$$E_x = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega) d\omega = 1$$



$$c) x(\omega) = \frac{1 - (ae^{-j\omega})^N}{1 - ae^{-j\omega}} \quad x[k] = \frac{1 - a^N}{1 - aW_N^k} \quad S_{xx}(\omega) = \frac{(1 - a^N \cos N\omega + a^2)}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$$

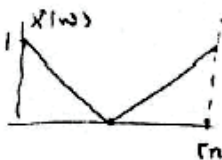
$$\left[\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1 - a^N}{1 - a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega) d\omega = \frac{1 - a^N}{1 - a^2} \right]$$

④ برای کدینگ DFT سیگنال $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ رابطه بین $x(n)$ و $X(k)$ را بنویسید.

$$a) X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad b) X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad c) \int_{-N}^N |X(\omega)|^2 d\omega = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \quad d) \int_{-N}^N |X(\omega)|^2 d\omega = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

$$[a) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) - \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad b) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad c) 2N(x(n))]$$

$$[d) 2N(x(n)) \quad e) 2N x(n)]$$



⑤ دسگال سیگنالی در شکل ارائه شده است. آن را با DFT کد کنید.

$$[X(k) = \{1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}]$$

⑥ طبق سیگنال $v(n)$ رابطه $v(n) + \frac{1}{5}v(n-1) = 2\delta(n) + 3\delta(n-1)$ را بنویسید.

$$[V(\omega) = \frac{2+3e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{5}e^{-j\omega}}]$$

⑦ DFT سیگنال $x(n) = \{1, 2, 1, 1\}$ و $x'(n) = \{1, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$ را بنویسید. DFT و DFT سیگنال $x(n)$ و $x'(n)$ را بنویسید.

$$[X(\omega) = X'(\omega) = 2 + e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega}, X(k) = X(\omega) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{4}}]$$

$$[X'(k) = X(\omega) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{4}}, X(k) \neq X'(k)]$$

⑧ کارزارش مدار خطی $\{1, 2, 1, 1\}$ و $\{1, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$ را بنویسید. رابطه بین DFT و DFT سیگنال $x(n)$ و $x'(n)$ را بنویسید.

$$[\text{کارزارش مدار خطی: } \{1, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}]$$

⑨ فرکانس خروجی دوری در سیستمی خطی است به هشتاد و نه سیگنالی خطی در حالت پهنای باند است. این سیگنال را بنویسید. $x(n)$ و $x'(n)$ را بنویسید. $A \sin n\omega$ را بنویسید.

$$[x(n) \Rightarrow \frac{A}{2}(1 - \cos 2n\omega) \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = 2\omega \end{cases}, x(n) \Rightarrow A \sin n\omega \Rightarrow \omega = 2\omega]$$

⑩ DFT سیگنال $x(n)$ را بنویسید. رابطه بین $x(n)$ و $x'(n)$ را بنویسید.

[خبر]

⑪ سیگنال $x(n) = 0.5\delta(n-1) + \delta(n) + 0.5\delta(n+1)$ را بنویسید. رابطه بین $x(n)$ و $x'(n)$ را بنویسید.

$$[y(n) = 0.5\delta(n-1) + \delta(n) + 0.5\delta(n+1)]$$

$$\left[\frac{1}{(1 - 0.9 e^{\frac{j\omega T}{2}})(z - e^{\frac{j\omega T}{2}})} \right]$$
[illegible]

$$\begin{aligned} x(n) &= A \ln n w_c \ln n w_c = \frac{A}{T} \ln(w_p n) + \frac{A}{T} \ln(w_m n) \quad \therefore w_m = w_c + w_p, w_p = w_c - w_p \\ \Rightarrow g(n) &= \frac{A}{T} \ln(n w_p + \varphi(w_p)) + \frac{A}{T} \ln(n w_m + \varphi(w_m)) = \\ &A \ln\left(w_c \left(n + \frac{\varphi(w_m) + \varphi(w_p)}{T w_c}\right)\right) \ln\left(w_c \left(n + \frac{\varphi(w_m) - \varphi(w_p)}{T w_p}\right)\right) \quad \therefore T w_c = w_m - w_p \\ \Rightarrow g(n) &= A \ln\left(w_c \left(n + \frac{\varphi(w_c)}{T w_c}\right)\right) \ln\left(w_c \left(n + \frac{\Delta \varphi(w)}{\Delta w}\right)\right) \end{aligned}$$

طبق آلف تاخیر برای $T_g(w) = -\frac{d\varphi(w)}{dw}$ و تاخیر برای phase delay برابر است: $T_p(w_c) = \frac{\varphi(w_c)}{w_c}$ لذا برای اثرات

$$g(n) = A C_n(w_c(n - T_p(w_c))) e^{j\varphi(w_c(n - T_g(w)))}$$

تغییر در w می شود نسبت به w_c $A C_n n w$ فقط با تاخیر بر روی n و در n و w_c تغییر می کند.

۲۲) Bounded Real , Lossless Bounded Real

[نیم BR استریات که $H(\omega) \leq 1$ باشد LBR استریات $H(\omega) = 1$ باشد]

(۲۳) آداب فقیروں کے، مخیر - ناکہنہ - تران - دامنہ - دربانہ - طائفہ کے۔

$\sum_k H_k(z) = \beta z^{-n}$ $\beta \neq 0$	Delay - Complementary	کسٹم باؤنڈ
$\sum_k H_k(z) = H_{\text{allpass}}(z)$	allpass -	کسٹم باؤنڈ
$\sum_k H_k(w) ^2 = K$ for all w	power -	کسٹم باؤنڈ
$\sum_k H_k(w) = \beta$ for all w	Magnitude	کسٹم باؤنڈ
اس کے کسٹم باؤنڈ	Donkey -	کسٹم باؤنڈ